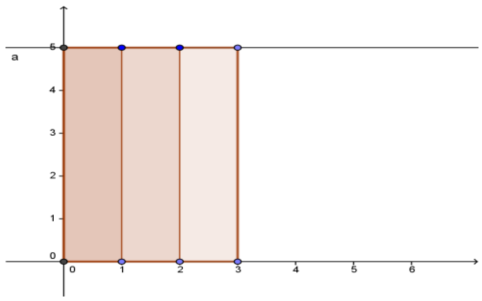
Wie kommt es zur FLÄCHEN–BERECHNUNG mit dem Integral?

1. Dazu probieren wir zuerst einmal, die Fläche unter der Funktion y=5 bis zur x–Achse zu berechnen

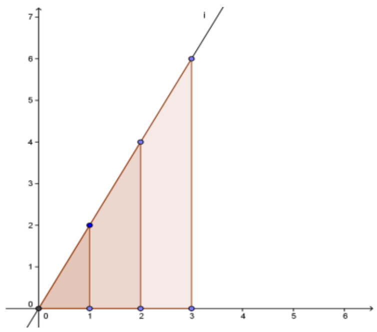


Wie groß ist die Fläche – zwischen x=0 und x=1: ➔ A[0;1] = 5·1
– zwischen x=0 und x=2: ➔ A[0;2] = 5·2
– zwischen x=0 und x=3: ➔ A[0;3] = 5·3
…………………………………………………………………..
– zwischen x=0 und x=x: ➔ A[0;x] = 5·x

Daraus lässt sich beweisen: Die Fläche unter der Funktion f(x) = a ist die Stammfunktion F(x) von f(x)

$$\textbf{A[0;x]} = \textbf{F(x)} = \int_0^x a \cdot dx = \textbf{a·x}$$

2. Nun können wir das bei der Funktion f(x) = 2x probieren



Wie groß ist die Fläche – zwischen x=0 und x=1: ➔ A[0;1] = 2·1/2 = 1
– zwischen x=0 und x=2: ➔ A[0;2] = 4·2/2 = 4
– zwischen x=0 und x=3: ➔ A[0;3] = 6·3/2 = 9
…………………………………………………………………..
– zwischen x=0 und x=x: ➔ A[0;x] = 2x·x/2 = x^2

Daraus lässt sich beweisen: Die Fläche unter der Funktion f(x) = a·x ist die Stammfunktion F(x) von f(x)

$$\textbf{A[0;x]} = \textbf{F(x)} = \int_0^x a \cdot x \cdot dx = a \cdot x^2/2$$

3. Wie lässt sich aber nun eine Fläche berechnen als Differenz der größeren Fläche minus kleiner Fläche:

– zwischen x=1 und x=3: ➔ A[0;3] – A[0;1] = 9–1 =8
– zwischen x=2 und x=4: ➔ A[0;4] – A[0;2] = 16–4 = 12
…………………………………………………………………..
– zwischen x = x_1 und x = x_2 : ➔ A[0;x_2] – A[0;x_1] = F(x_2) – F(x_1)

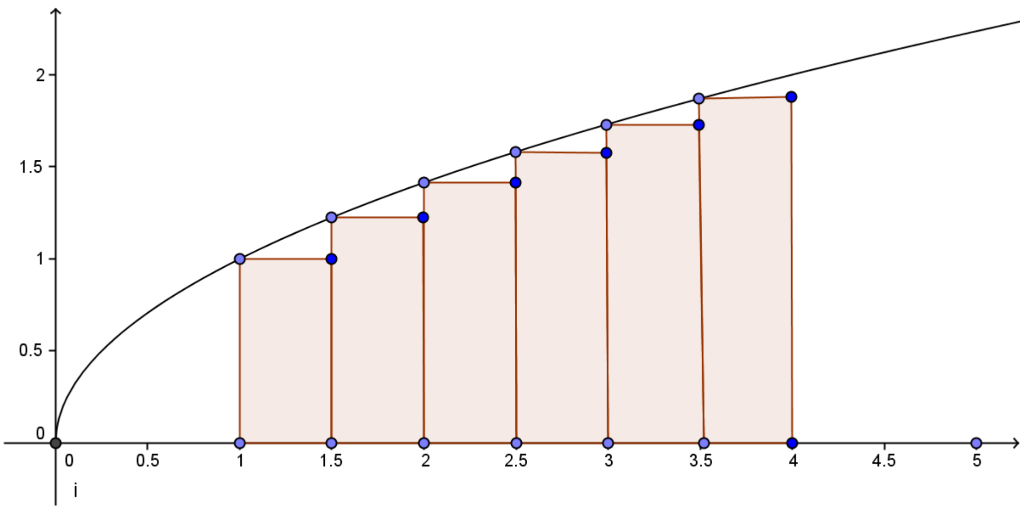
Allgemein gilt nun offensichtlich

$$A[x_1;x_2] = \int_{x1}^{x2} a \cdot x \cdot dx = F(x_2) - F(x_1) = a \cdot x^2/2 \;\Big|_{x_1}^{x_2} = a \cdot (x_2^2 - x_1^2)/2$$

Oder noch allgemeiner für eine beliebige Funktion f(x):

$$\boxed{A[x_1;x_2] = \int_{x1}^{x2} f(x)\ dx = F(x_2) - F(x_1)}$$

4. Was noch fehlt, ist die Erklärung, wieso das Integral mit einem $\int$ und einem dx angeschrieben wird:



Hier sieht man eine Funktion und darunter Rechteckflächen, die links immer an die Funktion anstoßen. Das kann man als ersten Versuch interpretieren, die Fläche unter der Funktion von x=1 bis x=4 zu berechnen.

Sieht man sich an, wie das als Formel aussehen könnte, so ergibt sich:

A $\approx$ f(1)·0,5 + f(1,5)·0,5 + f(2)·0,5 + f(2,5)·0,5 + f(3)·0,5 + f(3,5)·0,5

und das könnte man kürzer schreiben: Summe von Funktionswerten f(xi) mal Intervallbreite Δx:
<u>Sum</u> $f(x_i) \cdot \Delta x$ (für i=1 bis i=6)

diese Annäherung wird besser, wenn man die Intervallbreite kleiner wählt, also etwa Δx=0,25 usw.

Der Grenzwert aller dieser Summen ist dann $\int_a^b f(x) \cdot dx$

wobei aus Δx das Symbol dx geworden ist und aus <u>Sum</u> das Integralzeichen $\int$